Глава 2

Равнинни криви с кривина, която зависи единствено от разстоянието до фиксирана точка

2.1 Подвижен репер асоцииран с равнинна крива

Фундаменталната теорема за съществуване и единственост в теорията за равнинните криви гласи, че всяка крива е определена еднозначно (с точност до евклидово движение) чрез нейната кривина зададена като функция на дължина на дъгата ѝ (вж. Berger & Gostiaux [1988, p. 296] или Oprea [2007, p. 37]). Простотата на ситуацията е заблуждаваща, тъй като в много случаи е невъзможно търсената крива да бъде намерена в явен вид. Като имаме това предвид е ясно, че ако кривината е зададена като функция на Декартовите ѝ координати, ситуацията е още по-сложна. Разглеждайки уравненията на Frenet-Serret като динамична система, в Vassilev *et al* [2009] (вж. също Djondjorov *et al* [2009]) е доказано, че когато кривината е зададена като функция на разстоянието до началото задачата винаги може да бъде редуцирана до квадратури.

Цитирания резултат не може да бъде разглеждан като напълно нов, тъй като Singer [1999] е показал, че в някои случаи, е възможно такива кривини да имат интерпретации на централен потенциал и чрез стандартни процедури в класическата механика да бъдат намерени траекториите ѝ. Подходът, който ще следваме тук е напълно различен от групово-теоретичния развит във Vassilev *el al* [2009] или механичният Singer [1999] разгледани в цитираните по-горе статии. Методът е представен чрез най-естествените примери в класа на кривите, чиито кривини зависят единствено от разстоянието до началото. Първият пример който ще разгледаме тук е случая, когато разглежданата функция е линейна функция на това разстояние, т.е.,

$$\kappa = \sigma r, \qquad r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + z^2} \tag{2.1}$$

където x, z са декартовите координати в равнината XOZ, които следва да бъдат разглеждани като функции на дължината на дъгата параметризирани чрез s, а σ е реална положителна константа.

Ако означим с $\theta(s)$ наклона на тангентата към кривата по отношение на оста OX можем да използваме геометричната релации

$$\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s} = \kappa(s), \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\theta(s), \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \sin\theta(s) \tag{2.2}$$

които могат да бъдат изведени и от уравненията на Frenet-Serret (виж също фиг. 1.1)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(s)}{\mathrm{d}s} = \mathbf{T}(s), \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\mathbf{T} \tag{2.3}$$

в което $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}$ са респективно тангенциалния и нормалния вектори към кривата, а s е естествения параметър по нейното протежение. Като комбинираме (2.1) и (2.2) получаваме

$$\frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s} = \kappa(r) \tag{2.4}$$

което в нашия случай определено води до твърде сложни уравнения. Ние ще постъпим (както е предложено, но не е използвано реално в Singer [1999]) като преминем към **подвижния репер** $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ асоцииран с кривата

$$\mathbf{x} = \xi\mathbf{T} + \eta\mathbf{N} \tag{2.5}$$

и съгласно уравненията на Frenet-Serret (2.3) ще имаме

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s} = \dot{\xi} = \kappa\eta + 1, \qquad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s} = \dot{\eta} = -\kappa\xi. \tag{2.6}$$