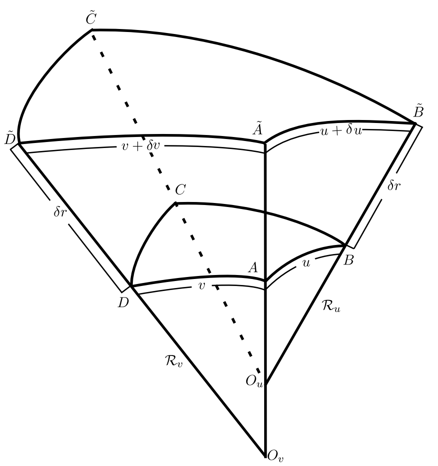
Глава 4

Повърхностно напрежение и равновесие

4.1 Механично равновесие

4.1.1 Уравнение на Laplace - Young



Фигура 4.1: Инфинитезимално локално разширяване на повърхнината на мембраната при увеличаване на налягането.

Нека да разгледаме инфинитезималният криволинеен четириъгълник $ABCD$ от мембраната. Ако точката A е начало на ортогоналните координатни линии върху мембраната, която изпитва вътрешно налягане p_{in} и е подложена на външно p_{out}, а $\mathcal{R}_u$ и $\mathcal{R}_v$ са радиусите на кривините на координатните линии през A, можем да запишем следните уравнения за работата W, свързана с безкрайно малкото раздуване на криволинейния четириъгълник $ABCD$ със страни u и v до близкия по форма и размер четириъгълник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$

със страни $u+\delta u$ и $v+\delta v$ (δu и δv са безкрайно малки)

$$\begin{aligned} W &= (p_{in}-p_{out})S\delta r = \Delta p S\delta r = \sigma\Delta S \\ &= \sigma[u(1+\frac{\delta r}{\mathcal{R}_u})v(1+\frac{\delta r}{\mathcal{R}_v}) - uv] = \sigma(\frac{1}{\mathcal{R}_u}+\frac{1}{\mathcal{R}_v})uv\delta r = \sigma(\frac{1}{\mathcal{R}_u}+\frac{1}{\mathcal{R}_v})S\delta r \end{aligned}$$

и следователно

$$\Delta p = 2\sigma H \tag{4.1}$$

където δr - преместването на мембраната под действието на Δp, σ е повърхностното напрежение, а самото уравнение е известно като **уравнение на Laplace-Young**.

4.1.2 Аксиално симетрични мембрани

Една значителна редукция на задачата се получава ако се ограничим с аксиално симетрични мембрани, което и сме направили в много от разглежданията по-нататък.

ще опишем аксиално симетричните повърхнини $\mathcal{S}$ чрез задаването на тяхно меридианно сечение, т.е., крива $u \longrightarrow (r(u), z(u))$ в равнината XOZ, предполагайки че u е т.нар. естествен параметър, който е свързан със съответната дължина на дъгата. Пълната дължина на дъгата ще означим с L. Повърхнината $\mathcal{S}$ може да бъде представена в Евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, в което е фиксиран ортонормален базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, чрез параметъра u и ъгълът v който задава завъртането на равнината XOY посредством векторно-значната функция

$$\mathbf{x}(u,v) = r(u)\mathbf{e}_1(v) + z(u)\mathbf{e}_3(v), \qquad 0 < u \leq L, \quad 0 \leq v < 2\pi. \tag{4.2}$$

Тук векторът $\mathbf{e}_1(v)$ е новата позиция на базисния вектор $\mathbf{i}$ след завъртането на ъгъл v

$$\mathbf{e}_1(v) = \cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j}. \tag{4.3}$$

Тъй като завъртането е около третата ос $\mathbf{k}$, то вектора който я представя в (4.2) е константа, т.е., $\mathbf{e}_3(v) = \mathbf{k} = \text{const}$. Двойката $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ може да бъде допълнена до ортонормален базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ в $\mathbb{R}^3$. Третият вектор $\mathbf{e}_2(v)$ може да бъде въведен като векторно произведение на векторите $\mathbf{e}_3(v)$ и $\mathbf{e}_1(v)$, а именно

$$\mathbf{e}_2(v) = \mathbf{e}_3(v) \times \mathbf{e}_1(v) = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_1(v) = -\sin v\mathbf{i} + \cos v\mathbf{j}\,.$$