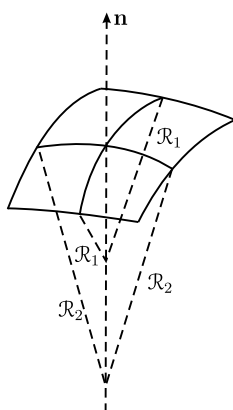


Глава 5

Уравнения на равновесните състояния на мембраните

5.1 Модел на Canham



Фигура 5.1: Парче от мембраната огънато в две равнини. Центровете на кривините лежат върху нормалата към повърхнината.

Пресмятането на еластичната енергия необходима за огъване на една равнина в две перпендикулярни направления е достатъчно сложна задача. Все пак ако срязващото напрежение се пренебрегне се оказва, че този проблем се редуцира до интеграл от сумата на квадратите на отделните кривини (фиг. 5.1).

Необходимо е значително да се отклоним от уравненията на инженерната механика за да се опишат задоволително многобройните биологични наблюдения. Например червените кръвни клетки могат да приемат много форми без да хемолизират и могат да

преминават от назъбена форма в двойно вдлъбната форма.

С цел да разреши енигматичният проблем с формата на RBC Canham [1970] разглежда еластичната енергия на огъване на мембраната от вида

$$U = \frac{D}{2} \int (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dA \quad (5.1)$$

където D е модула на огъване, а κ_1 и κ_2 са главните кривини на повърхнината.

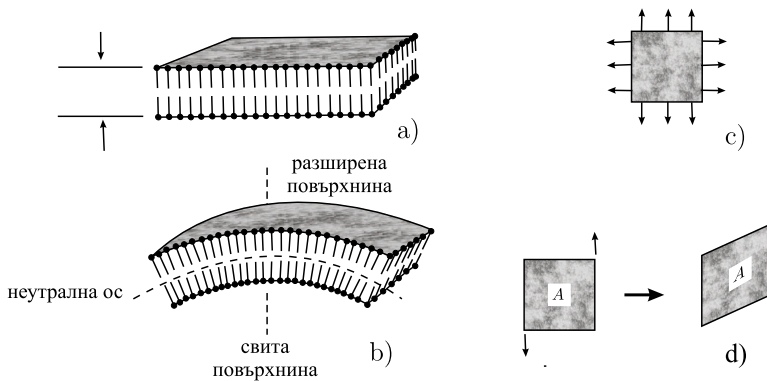
5.1.1 Основни предположения в модела

1) мембраните са съставени главно от две изотропни неустойчиви повърхнини, което е доказано чрез електронни микрографии на мембрани и вискозо-еластични изследвания проведени от Rand [1964]. Известно е, че мицеларната структура може също да съществува в мембраната, но тя е по-нестабилна (Stein [1967]). Davison & Danielli [1952] описват мембраната като двуслойна структура. Обяснението на вискозо-еластичната природа на мембраната на червената кръвна клетка е представено на фиг. 5.2 (можем да разгледаме напрегнатото състояние на мембраната като хидростатично в две направления). Плоските мембрани могат само временно да се съпротивляват на деформацията, без това да води до промени в площта. Всеки опит за промяна в площта на едната или друга повърхност на мембраната поражда еластична енергия на огъване, защото вътрешната повърхност е компресирана, а външната повърхност разтеглена (фиг. 5.2).

2) Конкретно за червената кръвна клетка не се предполага, че тя се намира в двойно вдлъбната форма, а по-скоро че двойно вдлъбнатата форма минимизира еластичната ѝ енергия запасена в мембраната. Предполага се, че плоските елементи от мембраната не притежават енергия на огъване и че всеки изкривен елемент има еластична енергия.

3) При всички промени във формата дължащи се на осмотичната промяна на обема се счита, че те се реализират без да се променя площта на клетката (има се предвид площта формирана от неутралните повърхнини (фиг. 5.2)).

4) Мембраната има едни и същи физически свойства върху цялата повърхнина. Това е в съответствие с резултатите на Rand & Burton [1964], но противоречи на тези получени от Murphy [1965] и Fung & Tong [1968].



Фигура 5.2: На фигурата е представено схематично описание на мембраната на RBC. а) листов модел на мембрана предложен от Davison & Danielli. б) Елемент от мембраната е огънат в една равнина, показана е компресията на вътрешната повърхнина и разтягането на външната. с) Елемент от площта, който е напрегнат еднакво във всички направления в равнината на мембраната (двумерен хидростатичен натиск) ще противодейства на еластичното напрежение. d) Мембраната подложена само на срязващо напрежение, което води до деформация и без натрупване на еластична енергия.

5.2 Модел на Helfrich и Deuling

Отново във връзка с формата на RBC Helfrich & Deuling [1975] предлагат обобщение на модела на Canham.

В този модел плътността на енергията за единица площ е от вида

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}k_c(\kappa_1 + \kappa_2 - \mathfrak{h})^2 + \frac{1}{2}\bar{k}_c\kappa_1\kappa_2 \quad (5.2)$$

където κ_1 и κ_2 са главните кривини, k_c и \bar{k}_c са еластичните модули на мембраната и \mathfrak{h} е така наречената **спонтанна кривина**.

За затворени повърхнини (каквато е RBC) интеграла на втория член е константа и следователно не играе никаква роля при варирането на повърхнината. Освен това предвид на аксиалната симетрия на RBC в случая можем да запишем

$$\delta \left(\frac{1}{2}k_c \int (\kappa_\mu + \kappa_\pi - \mathfrak{h})^2 dA + \Delta p V + \lambda \mathcal{A} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Тук κ_μ и κ_π са съответно кривините по протежение на меридианите и паралелите (вж. (1.80)), а Δp и λ са множителите на Lagrange. Ако изберем за параметър разстоянието x до оста на симетрия OZ тези формули

се трансформират във вида

$$\kappa_\mu = \frac{\ddot{z}(x)}{(1 + \dot{z}^2(x))^{3/2}}, \quad \kappa_\pi = \frac{\dot{z}(x)}{x\sqrt{1 + \dot{z}^2(x)}}. \quad (5.4)$$

Непосредствено се проверява, че е налице тъждеството

$$\kappa_\mu = \frac{d}{dx}(x\kappa_\pi) \quad (5.5)$$

което в разгънатата форма може да се запише във вида

$$\frac{d\kappa_\pi}{dx} = \frac{\kappa_\mu - \kappa_\pi}{x}. \quad (5.6)$$

Ако с $\psi(x)$ означим ъгъла между нормалата към повърхнината и оста на ротация и разгледаме триъгълника с хипотенуза радиусът на кривината \mathcal{R}_π то можем да запишем и уравнението (ср. фиг. 5.3)

$$\frac{x}{\mathcal{R}_\pi} = \sin \psi \quad (5.7)$$

което може да бъде трансформи-

рано във вида

$$\kappa_\pi = \frac{\sin \psi}{x}. \quad (5.8)$$

В такъв случай предвид на (5.5) имаме израз и за другата кривина, т.е.,

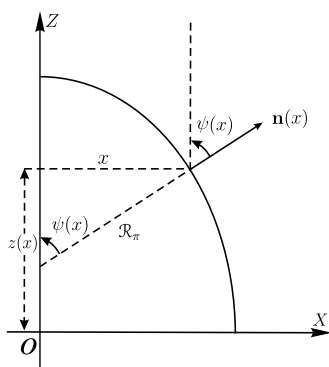
$$\kappa_\mu = \cos \psi \frac{d\psi}{dx} \quad (5.9)$$

а към тези равенства следва да добавим и геометричната релация

$$\frac{dz}{dx} = -\operatorname{tg} \psi(x). \quad (5.10)$$

Знакът в последната формула отчита факта, че при нарастването на x ординатата z намалява. От своя страна V и \mathcal{A} са определени от интегралите

$$V = \int dV \quad \text{и} \quad \mathcal{A} = \int d\mathcal{A} \quad (5.11)$$



Фигура 5.3: Профилна крива и геометрия на аксиално-симетрична повърхнина.